Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

8. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei K ein Körper und A, B, C, U, V, X, Y, Z Unbestimmte. Sei $f : K[A, B, C] \to K[U, V]$ der (wegen der universellen Eigenschaft eindeutig bestimmte) Ringhomomorphismus mit $f(A) = U^2$, $f(B) = UV$, $f(C) = V^2$. Sei R das Bild von f. Sei S der Restklassenring $K[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$.

a) Konstruieren Sie mittels der universellen Eigenschaft des Polynomringes einen bijektiven Homomorphismus $S \to R$.

b) Zeigen Sie, daß der Ring R nicht faktoriell ist.

Aufgabe 2.

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Für Untermoduln M_1, M_2 von M sei

$$[M_1 : M_2] = \{a \in R | aM_2 \subseteq M_1\}.$$

a) Zeigen Sie, daß $[M_1 : M_2]$ ein Ideal von R ist.

b) Seien M_1, M_2, M_3 Untermoduln von M. Zeigen Sie, daß

$$[(M_1 \cap M_2) : M_3] = [M_1 : M_3] \cap [M_2 : M_3].$$

c) Bestimmen Sie $[(6) : (2)]$ und $[(6) : (14)]$ für $R = M = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.

Sei A ein kommutativer Ring und sei M ein A-Modul mit $M \cong M \oplus M$. Sei $R = \mathrm{End}_A(M)$.

a) Zeigen Sie, daß $R \cong R^2$ als R-Modul.

b) Sei $n \geq 1$ beliebig. Zeigen Sie, daß der R-Modul R eine Basis mit genau n Elementen hat.

c) Sei $A = \mathbb{R}$ und M der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Folgen $(a_0, a_1, \dots)$ reeller Zahlen mit $a_i = 0$ für fast alle i. Zeigen Sie, daß M die obige Bedingung erfüllt.

Aufgabe 4.

Sei R ein Integritätsbereich und sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Sei M ein R-Modul, so daß für jedes $s \in S$ die Multiplikation mit s eine injektive Abbildung $M \to M$ ist. Auf $M \times S$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $(v, s) \sim (v', s')$ falls $vs' = v's$. Sei $S^{-1}M$ die Menge der Äquivalenzklassen. Man schreibt die Klasse von (v, s) auch als v/s. (Ist M ein Primideal von R, dann stimmt diese Definition von $S^{-1}M$ mit der in Aufgabe 1 von Blatt 7 überein.)
Für $v, v' \in M$, $s, s' \in S$ und $a \in R$ sei $(v/s) + (v'/s') = (vs' + v's)/ss'$ und $(a/s)(v/s') = (av)/(ss')$. Damit wird $S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Modul. Für einen Homomorphismus $f : M \to M'$ von

R-Moduln bezeichnen wir mit $f_S : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ den Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln mit $f_S(v/s) = f(v)/s$.
Sei

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, wobei M', M und M'' die obige Bedingung erfüllen. Zeigen Sie, daß

$$0 \to S^{-1}M' \xrightarrow{f_S} S^{-1}M \xrightarrow{g_S} S^{-1}M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $S^{-1}R$-Moduln ist.

Abgabe: Montag, 10. Dezember 2007.