Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 9, Abgabe am 18.12.2007

Aufgabe 33

Sei $R \to R'$ ein treuflacher Ringhomomorphismus. Wir benutzen die Notationen aus Aufgabe 30, und bezeichnen zur Unterscheidung mit $p_1, p_2 \colon R' \to R^{(2)}$ bzw. $p_{12}, p_{23}, p_{13} \colon R^{(2)} \to R^{(3)}$ die dort definierten Morphismen f_2, f_1 bzw. f_3, f_1, f_2, die "an der Stelle, die im Index nicht vorkommt, eine 1 einfügen". Wir bezeichnen mit p_i^* den Funktor "Tensorieren mit $p_i \colon R' \to R^{(2)}$" von der Kategorie der R'-Moduln in die Kategorie der $R^{(2)}$-Moduln. Analog haben wir Funktoren p_{ij}^*.

Sei M' ein R'-Modul. Ein *Abstiegsdatum* ist ein $R^{(2)}$-Modulisomorphismus

$$\varphi \colon p_1^* M' \xrightarrow{\cong} p_2^* M',$$

der die *Kozykelbedingung* erfüllt, d. h. dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
p_{12}^* p_1^* M' \arrow[r, "p_{12}^*\varphi"] \arrow[d, equal] & p_{12}^* p_2^* M' = p_{23}^* p_1^* M' \arrow[r, "p_{23}^*\varphi"] & p_{23}^* p_2^* M' \arrow[d, equal] \\
p_{13}^* p_1^* M' \arrow[rr, "p_{13}^*\varphi"] & & p_{13}^* p_2^* M'
\end{tikzcd}$$

a) Seien R ein Ring, $f_1, \dots, f_n$ Elemente von R, die das Einsideal erzeugen, und $R' = \prod_{i=1}^n R_{f_i}$. Zeige, dass der natürliche Morphismus $R \to R'$ treuflach ist, und dass ein Abstiegsdatum im obigen Sinne das gleiche ist, wie ein Verklebedatum für quasikohärente $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R}$-Moduln bezüglich der Überdeckung $\operatorname{Spec} R = \bigcup_i \operatorname{Spec} R_{f_i}$.

b) Zeige, dass der natürliche Funktor

$$(R\text{-Moduln}) \longrightarrow (R'\text{-Moduln mit Abstiegsdatum } \varphi),$$

der M auf $M \otimes_R R'$ mit dem natürlichen Abstiegsdatum (nämlich welchem?) abbildet, volltreu ist. (Die Kozykelbedingung wird hier nicht benötigt.)

Aufgabe 34

a) Sei X ein Schema. Wir definieren für $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ auf X die Gruppen $\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ als die Rechtsableitungen des linksexakten Funktors $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, -)$, ausgewertet in $\mathscr{G}$. Zeige: Es gibt natürliche Isomorphismen $\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\cong} H^i(X, \mathscr{G})$, $i \geq 0$.

b) Sei nun X affin, und $\mathscr{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul. Zeige: $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$. *Hinweis:* Benutze Teil a), und dass man analog zu Aufgabe 32 die Gruppe $\mathrm{Ext}^1()$ in der Kategorie der $\mathscr{O}_X$-Moduln auf X als Gruppe von Extensionen charakterisieren kann. Zeige zunächst, dass in einer Extension $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{H} \to \mathscr{O}_X \to 0$ notwendigerweise $\mathscr{H}$ quasi-kohärent ist.

Aufgabe 35

Sei $E_2^{pq} \Longrightarrow H^{p+q}$ eine konvergente Spektralsequenz, die im ersten Quadranten konzentriert ist (d. h. $E_2^{pq} \neq 0$ impliziert $p \geq 0$, $q \geq 0$). Wir bezeichnen für alle r, p, q mit $\kappa_1\colon E_r^{p,0} \to H^p$ bzw. $\kappa_2\colon H^q \to E_r^{0,q}$ die natürlichen ("Kanten-") Morphismen. Zeige, dass man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \xrightarrow{\kappa_1} H^1 \xrightarrow{\kappa_2} E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \xrightarrow{\kappa_1} H^2$$

hat.

Aufgabe 36

Seien k ein Körper und $f \in k[X, Y, Z]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d > 0$. Sei $C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2_k$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema. Wir nehmen an, dass der Punkt $(1:0:0)$ nicht auf C liegt, so dass $U = D_+(Y) \cap C$, $V = D_+(Z) \cap C$ eine offene Überdeckung $\mathscr{U}$ von C bilden.

Berechne die Dimensionen der Čech-Kohomologiegruppen $\check{H}^i(\mathscr{U}, \mathscr{O}_C)$ über k.