Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

13. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei k ein Körper. Berechnen Sie für die folgenden k-Algebren A die Dimension sowie eine Teilmenge algebraisch unabhängiger Elemente, so daß A ganz über der durch diese Elemente erzeugten Unteralgebra ist.

a) $A = k[X, Y]/(XY)$

b) $A = k[X, Y]/(Y^2 - X^3 + g_2X + g_3)$ mit $g_2, g_3 \in k$.

Aufgabe 2:
Sei k ein Körper und $f(X_1, \ldots, X_n)$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Sei $R = \bigoplus_m R_m$ der graduierte Ring $k[X_1, \ldots, X_n]/(f)$. Berechnen Sie $l(R_m)$ und den Leitterm des Hilbertpolynoms von R.

Aufgabe 3:
Sei k ein unendlicher Körper und $f \in k[X_1, \ldots, X_n] = A$ nicht konstant. Dann gibt es $X_1', \ldots, X_{n-1}' \in A$ von der Form $X_i' = X_i + a_iX_n$ mit $a_i \in k$ so daß A ein endlich erzeugter $k[X_1', \ldots, X_{n-1}', f]$-Modul ist.

Aufgabe 4: (Hilberts Nullstellensatz)
Sei k ein Körper, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ und $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal. Verwenden Sie den Noetherschen Normalisierungssatz, um die folgenden Aussagen zu zeigen.

1. Ist $\mathfrak{p}$ maximal, so ist $A/\mathfrak{p}$ eine endliche Körpererweiterung von k.
2. $\mathfrak{p}$ ist ein Durchschnitt maximaler Ideale von A. (Zeigen Sie hierzu, daß es für jedes $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ ein maximales Ideal gibt, das $\mathfrak{p}$, aber nicht f enthält.)

Abgabe: Donnerstag, 28. Januar 2010.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/