Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 11

Abgabe 20.01.2012

Aufgabe 1:

Sei n eine natürliche Zahl.

(i) Wie viele Multiplikationen und Divisionen sind nötig, um die Determinante einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{Q})$ zu berechnen,

  (a) wenn man die Formel von Leibniz benutzt,

  (b) wenn man sukzessive nach der jeweils letzten Zeile entwickelt und sich dabei alle berechneten Werte von Unterdeterminanten für den weiteren Verlauf der Rechnung merkt,

  (c) wenn man das Gaußsche Eliminationsverfahren anwendet?

(ii) Wieviel Rechenzeit benötigt ein Computer zum Berechnen einer Determinante im Fall $n = 25$ mindestens,

  (a) wenn er nach Methode (i), (a) vorgeht und für jede Multiplikation bzw. Division $3 \cdot 10^{-19}$ Sekunden benötigt

  (b) wenn er nach Methode (i), (c) vorgeht, aber in jeder Sekunde nur 3000 Multiplikationen bzw. Divisionen schafft.

(Bemerkung: Vorzeichenänderungen sollen stets vernachlässigt werden.)

Aufgabe 2:

(i) Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und seien $x_{kl} \in \mathbb{R}$ für $(k, l) \neq (i, j)$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) = (a_{kl}) \in M_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$a_{kl} = \begin{cases} x_{kl} & (k,l) \neq (i,j) \\ x & (k,l) = (i,j). \end{cases}$$

Zeige, dass die Abbildung

$$x \longmapsto \det A(x)$$

eine differenzierbare Abbildung mit Ableitung $x \mapsto \mathrm{Adj}(A(x))_{ji}$ ist.

Hierbei ist $\mathrm{Adj}(A) = \tilde{A}$ wie folgt definiert: Der Eintrag $(-1)^{i+j}\tilde{A}_{ij}$ ist die Determinante derjenigen $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus A durch streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht.

(ii) Sei $B : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Abbildung (d.h. die Abbildungen $x \mapsto B(x)_{ij}$ sind differenzierbar). Zeige, dass

$$x \longmapsto \det B(x)$$

eine differenzierbare Abbildung ist.

(c) Sei nun $C(x)$ die Matrix $(C(x))_{ij} = \frac{d\,B(x)_{ij}}{dx}$. Zeige

$$\frac{d \det B(x)}{dx} = \big(\det B(x)\big) \cdot \mathrm{Spur}\big(B(x)^{-1} C(x)\big)$$

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K$ gegeben, so dass $a_i + b_j \neq 0$ für alle i und j gilt. Die Matrix $C = (c_{ij}) \in M_n(K)$ sei definiert durch

$$c_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}.$$

Zeige:

$$\det C = \prod_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_j} \Big) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} ((a_i - a_j)(b_i - b_j)).$$

(Hinweis: elementare Spaltenumformungen, Entwickeln nach der letzten Zeile und Induktion)

Aufgabe 4: Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und entscheide, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`