Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann Sommersemester 2012

Probeklausur zur Linearen Algebra II

29.06.2012

Aufgabe 1: (13 Punkte)
Bestimme die Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A = (X+1)^4$.

Aufgabe 2: (11 Punkte)
Berechne die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

in der Form $A = PS$, wobei P symmetrisch, positiv definit ist und $S \in O(3, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3: (11 Punkte)
Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimme eine Orthonormalbasis durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:(9 Punkte)
Berechne den Signaturtyp der symmetrischen Bilinearform, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

definiert wird.

Aufgabe 5: (8 Punkte)
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme alle Matrizen $A \in O(n, \mathbb{R})$, die obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 6: (12 Punkte)
Sei (V, β) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum und sei $f \in O(V, \beta)$. Sei $g = f - \mathrm{id}_V$. Zeige:

$$\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} g)^{\perp}.$$

Aufgabe 7: (8+8 Punkte)
Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei (V, β) ein nichtausgearteter quadratischer Raum über K. Zeige:

(i) Ist $U \subset V$ ein total isotroper Unterraum (d.h. für alle $v \in U$ gilt $\beta(v, v) = 0$), so gilt $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.

(ii) Ist $\dim V = 2n$ gerade und existiert ein total isotroper Unterraum $U \subset V$ der Dimension n, so ist V isometrisch zum quadratischen Raum, der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.