Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **WS 2012/13**

Einführung in die Algebra

Klausur

Aufgabe 1:
Sei G eine Gruppe, und sei N ein Normalteiler in G. Zeige:
a) Ist $|N| = 2$, so liegt N im Zentrum $Z(G)$ von G.
b) Ist G/N zyklisch und $N \subset Z(G)$, so ist G abelsch.

Aufgabe 2:
Bestimme für den Ring $R = \mathbb{Z}[X]/(3, X^2 + X + 1)$
a) die Anzahl der Elemente.
b) die Anzahl der Nullteiler.
c) seine Primideale.

Aufgabe 3:
Sei A die Matrix eines Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ zwischen freien $\mathbb{Z}$-Moduln vom Rang n. Zeige, dass φ genau dann
a) injektiv ist, wenn $\det(A) \neq 0$.
b) surjektiv ist, wenn $|\det(A)| = 1$.

Aufgabe 4:
Zeige, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind.
a) $2X^5 - 87X^3 + 3X^2 + 21X - 96$
b) $X^3 + 2X^2 - 3X + 5$
c) $X^4 + 1$

Aufgabe 5:

Entscheide welche der folgenden Moduln/Ringe noethersch sind (mit Begründung).
a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul
b) der Ring $\mathbb{F}_p$
c) der Ring $\mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$
d) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Modul

Aufgabe 6:
a) Warum liegt $\sqrt[4]{3}$ nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{21})$?
b) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3})$ ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.
c) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + e^{2\pi i/3})$.