Lösungsskizze

Aufgabe 1:

a) Sei $N = \{e, n\}$, und sei $g \in G$ beliebig. Da N ein Normalteiler ist, gilt $gN = Ng$, d.h. $\{g, gn\} = \{g, ng\}$. Daher ist $gn = ng$, und somit $n \in Z(G)$.

b) Sei $g \in G$, sodass die Restklasse $\bar{g}$ ein zyklischer Erzeuger von G/N ist. Dann ist

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k N.$$

Seien $g_1, g_2 \in G$. Dann existieren $n_1, n_2 \in N$, und $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $g_i = g^{k_i} n_i$ für $i = 1, 2$. Da $N \subset Z(G)$, gilt

$$g_1 g_2 = g^{k_1} n_1 \cdot g^{k_2} n_2 = g^{k_1+k_2} n_1 n_2 = g^{k_1+k_2} n_2 n_1 = g^{k_2} n_2 \cdot g^{k_1} n_1 = g_2 g_1.$$

Daher ist G abelsch.

Aufgabe 2:

Es gilt $R \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X-1)^2$.

a) Es gilt $|R| = 9$, da R ein 2-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum ist.

b) Alle Nullteiler in R sind von der Form $a(X-1)$ für $a \in \mathbb{F}_3$. Also gibt es 3 Nullteiler in R, wenn man Null mitzählen möchte.

c) Das einzige Primideal ist $(X-1)$.

Aufgabe 3:

Nach dem Elementarteilersatz existieren $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, sodass PAQ Diagonalgestalt hat. Da $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, gilt $|\det(P)| = |\det(Q)| = 1$, und somit $|\det(PAQ)| = |\det(A)|$. Daher dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ eine Diagonalmatrix ist.

a) Der Homomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn $a_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also genau dann, wenn $\det(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$.

b) Der Homomorphismus φ ist genau dann surjektiv, wenn $|a_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$, also genau dann, wenn $|\det(A)| = |a_1 \cdot \ldots \cdot a_n| = 1$.

Aufgabe 4:

a) Die Primzahl 3 teilt alle Koeffizienten von $2X^5 - 87X^3 + 3X^2 + 21X - 96 \in \mathbb{Z}[X]$ außer dem Leitkoeffizienten und 3^2 teilt nicht 96. Daher ist das Polynom irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium.

b) Nach dem Reduktionskriterium genügt es zu zeigen, dass $f = X^3 + 2X^2 - 3X + 5$ in $\mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist. Da $\deg(f) = 3$ ist, genügt es zu prüfen, dass f keine Nullstellen in $\mathbb{F}_2$ hat. Nun ist $f = X^3 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$, und damit $f(0) = 1$, $f(1) = 1$. Also ist f irreduzibel.

c) Das Polynom $h = X^4 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$. Daher genügt es zu zeigen, dass h nicht Produkt zweier irreduzibler Polynome von Grad 2 ist. Angenommen $h = f \cdot g$ mit $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ und $\deg(f) = \deg(g) = 2$. Wir dürfen annehmen, dass $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ normiert sind. Schreibe $f = X^2 + aX + b$ und $g = X^2 + cX + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir folgende Gleichungen

$$bd = 1, \qquad cb + ad = 0, \qquad b + ac + d = 0, \qquad a + c = 0.$$

Daher ist $b = d = \pm 1$, und dies führt auf die Gleichung $a^2 = \pm 2$, welche keine Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt. Daher ist h irreduzibel.

Aufgabe 5:

Entscheide welche der folgenden Moduln/Ringe noethersch sind.

a) Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist nicht endlich erzeugt, und damit nicht noethersch. Beweis: Der von $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul besteht aus den Restklassen der rationalen Zahlen der der Form $x = c/b$, wobei $b = \mathrm{kgV}(b_1, \ldots, b_n)$. Hierbei seien Repräsentanten $a_i \in \mathbb{Q}$ in der gekürzten Form $a_i = c_i/b_i$ geschrieben.

b) Der Ring ist $\mathbb{F}_p$ ist ein Körper, und somit ein noetherscher Ring.

c) Der Ring $\mathbb{Z}$ ist noethersch. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist auch $\mathbb{Z}[X,Y]$ noethersch. Ist R ein noetherscher Ring, und I ein Ideal, so ist auch R/I noethersch. Damit ist $\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$ noethersch.

d) Es gilt $\mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Modul, also ein 1-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Daher ist $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ein noetherscher $\mathbb{R}$-Modul.

Aufgabe 6:

a) Das Polynom $X^4 - 3$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium für $p = 3$, und damit das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{3}$ über $\mathbb{Q}$. Also ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) : \mathbb{Q}] = 4$. Analog zeigt man, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[10]{21}) : \mathbb{Q}] = 10$. Angenommen $\sqrt[4]{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[10]{21})$, dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[10]{21})$, und damit $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) : \mathbb{Q}]$ teilt $[\mathbb{Q}(\sqrt[10]{21}) : \mathbb{Q}]$. Widerspruch!

b) Sei $\alpha = e^{2\pi i/3}$. Es gilt $X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - \alpha\sqrt[3]{2})(X - \alpha^2\sqrt[3]{2})$. Damit ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha\sqrt[3]{2}, \alpha^2\sqrt[3]{2})$ ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Nun ist $K \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)$. Umgekehrt ist $\alpha = \alpha\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{2} \in K$, also ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)$.

c) Sei $\alpha = e^{2\pi i/3}$, und sei $\beta = \sqrt[3]{2}$. Es genügt zu zeigen, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$. Es gilt $\alpha^3 = 1$ und $\beta^3 = 2$. Betrachte

$$(\alpha + \beta)^3 = 1 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 2 \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta).$$

Damit ist auch $\alpha^2\beta^2 \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$. Weiter ist

$$(\alpha + \beta)^4 = \alpha + 4\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2 = 9\alpha + 6\beta + 6\alpha^2\beta^2 \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta).$$

Daher ist auch $3\alpha + 2\beta = (\alpha + \beta)^4/3 - 2\alpha^2\beta^2 \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$, und somit $\alpha = 3\alpha + 2\beta - 2(\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$. Also auch $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha \in \mathbb{Q}(\alpha + \beta)$.