Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2012/13

Einführung in die Algebra

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei G eine Halbgruppe, für welche gilt:

   (i) Es existiert ein $e \in G$ mit $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
   (ii) Für alle $g \in G$ existiert ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1} \cdot g = e$.

   Zeige, dass dann G eine Gruppe ist.

b) Zeige die Kürzungsregeln in einer Gruppe G:

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y.$$
$$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y.$$

Aufgabe 2:

Entscheide, welche der folgenden Halbgruppen G eine Gruppe ist.

(i) $G =$ Menge der positiven ganzen Zahlen, $x \cdot y =$ übliches Produkt der Zahlen x und y.

(ii) $G = GL_2(\mathbb{R}) =$ Menge der 2×2-Matrizen mit nicht verschwindender Determinante, $x \cdot y =$ übliche Matrixmultiplikation.

(iii) $G =$ beliebige Menge mit Multiplikation $x \cdot y = y$.

(iv) Sei V ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und (v_1, v_2) eine Basis.
Sei G die Menge der $\mathbb{R}$-Automorphismen x von V, die jedes Element der Basis (v_1, v_2) in ein skalares Vielfaches eines Elements dieser Basis überführen und $x \cdot y$ die Verknüpfung. Beschreiben Sie die Menge G auch in Termen von Matrizen.

Aufgabe 3:

a) Sei G eine Gruppe, so daß $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ für alle $x, y \in G$. Zeige: G ist abelsch.

b) Sei G eine Gruppe, in der jedes Element sein eigenes Inverses ist. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe mit höchstens 5 Elementen. Zeige, dass G abelsch ist. Gilt dasselbe für eine Gruppe mit 6 Elementen?
Hinweis: Stelle mögliche Gruppentafeln auf.

Abgabe: Donnerstag, 18. Oktober 2012.