Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2012/13

Einführung in die Algebra

11. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei R ein Hauptidealring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass der R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ frei von endlichem Rang ist.

Aufgabe 2:

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$. Setze $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ für $1 \leq i \leq n$, und sei $N \subset \mathbb{Z}^n$ der von $v_1, \dots, v_n$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul. Zeige, dass $|\mathbb{Z}^n/N|$ genau dann endlich ist, wenn $\det(A) \neq 0$. Und in diesem Falle zeige, dass $|\mathbb{Z}^n/N| = |\det(A)|$.

Aufgabe 3:

Seien A, B und C endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring mit $A \oplus B \simeq C \oplus B$. Zeige, dass $A \simeq C$.

Aufgabe 4:

a) Berechne die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 10 \\ 2 & 2 & 10 & -10 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{Z}).$$

b) Sei $N \subset \mathbb{Z}^3$ der $\mathbb{Z}$-Untermodul, der von den Elementen $(0,0,6)$, $(2,0,0)$ und $(0,5,0)$ erzeugt wird. Berechne die Elementarteiler $a_1|a_2|a_3 \in \mathbb{Z}$ und eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{Z}^3$, für die a_1v_1, a_2v_2, a_3v_3 eine Basis von N bilden.

c) Sei $N \subset \mathbb{R}[X]^2$ der $\mathbb{R}[X]$-Untermodul, der von den Elementen $(X, 1)$ und $(0, X)$ erzeugt wird. Berechne die Elementarteiler $a_1|a_2 \in \mathbb{R}[X]$ und eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}[X]^2$, für die a_1v_1, a_2v_2 eine Basis von N bilden.

Abgabe: Donnerstag, 10. Januar 2013.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!