Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

13. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $f \in k[X]$ ein Polynom von Grad n über einem Körper k, und sei K ein Zerfällungskörper von f. Zeige, dass der Grad $[K : k]$ ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 2:
a) Sei $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Adjungiere zu $\mathbb{Q}$ eine reelle Nullstelle α von f, und zerlege f in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Q}(\alpha)[X]$.
b) Sei $g = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass jeder Zerfällungskörper von g den Grad $6 = 3!$ über $\mathbb{Q}$ besitzt.

Aufgabe 3:
a) Zeige, dass jede quadratische Körpererweiterung normal ist.
b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Zeige, dass $K/\mathbb{Q}$ nicht normal ist, aber es einen Zwischenkörper E von $K/\mathbb{Q}$ gibt mit $[K : E] = [E : \mathbb{Q}] = 2$. Insbesondere ist die Eigenschaft *normal* nicht transitiv.
c) Sei K/k eine normale Erweiterung, und sei $f \in k[X]$ ein irreduzibles Polynom. Ferner seien g und h zwei normierte Primfaktoren von f in $K[X]$. Zeige, dass es einen Automorphismus σ von K über k gibt mit $g^\sigma = h$. Insbesondere zerfällt f in $K[X]$ in irreduzible Faktoren, die alle denselben Grad haben.

Aufgabe 4:
Bestimme die normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})/\mathbb{Q}$.

Abgabe: Donnerstag, 24. Januar 2013.