Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra
14. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei G eine Gruppe, und sei H ein Normalteiler in G. Sei $[G, H]$ die Untergruppe von G, erzeugt von den Kommutatoren $ghg^{-1}h^{-1}$ für $g \in G$ und $h \in H$. Zeige:

a) Die Untergruppe $[G, H]$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für ein Element $h \in H$ liegt die Restklasse $\bar{h}$ im Zentrum von $G/[G, H]$.

Aufgabe 2:
Sei R ein Integritätsbereich, und sei $\Phi : R[X] \to R[X]$ ein Ringhomomorphismus mit $\Phi|_R = \mathrm{id}_R$. Zeige, dass Φ genau dann ein Automorphismus ist, wenn Elemente $a \in R^\times$, $b \in R$ existieren mit $\Phi(X) = aX + b$.

Aufgabe 3:
Bestimme für den Ring $R = \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ die Anzahl seiner

a) Einheiten.

b) Nullteiler.

c) Ideale.

d) Primideale.

Aufgabe 4:
Untersuche, ob folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind.

a) $3X^4 + 5X^3 - 10X^2 - 5X + 15$

b) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

c) $X^3 + 39X^2 - 4X + 8$

Aufgabe 5:
Für einen kommutativen Ring R bezeichne $M_k(R)$ den Ring der $k \times k$-Matrizen mit Einträgen aus R zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen. Sei $\mathrm{GL}_k(R)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen mit Einträgen aus R, d.h.

$$\mathrm{GL}_k(R) \;=\; \{A \in M_k(R) \mid \exists\, B \in M_k(R) : AB = E_k = BA\}.$$

Nun sei R euklidisch, und sei $a = (a_1, \dots, a_k)$ ein Spaltenvektor in R^k. Zeige, dass ein $A \in \mathrm{GL}_k(R)$ existiert mit

$$A \cdot a \;=\; (d, 0, \dots, 0),$$

wobei $d = \mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_k)$.

Aufgabe 6:
a) Warum liegt $\sqrt[6]{7}$ nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{91})$?
b) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ keine $\mathbb{Q}$-linearen Körperautomorphismen außer der Identität besitzt.

Hinweise zur Klausur

Zeit und Ort: Die Klausur findet am Donnerstag den 31.01.2013 von 10 Uhr (s.t.) bis 12 Uhr statt. Bitte seid 10 min vor der Klausur da. Die Klausur wird im kleinen und großen Hörsaal geschrieben.

Mitzubringen: Mitzubringen sind ein Stift (kein Bleistift) sowie ein Lichtbildausweis. Papier wird gestellt.

Alle weiteren Informationen werden auf der Internetseite zur Vorlesung http://www.math.uni-bonn.de/people/richarz/grm/ veröffentlicht.