Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei G eine Gruppe.

a) Sei $U \subset G$ eine Teilmenge, sodass $gug^{-1} \in U$ für alle $g \in G$, $u \in U$. Zeige, dass die von U erzeugte Untergruppe ein Normalteiler von G ist.

Nun sei speziell $U = \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$. Die von U erzeugte Untergruppe $G' = \langle U \rangle$ heißt die *Kommutatoruntergruppe von G*. Beweise die folgenden Aussagen über G'.

b) Die Untergruppe G' ist ein Normalteiler in G.

c) Die Faktorgruppe G/G' ist abelsch.

d) Ist N ein Normalteiler in G, so ist die Faktorgruppe G/N genau dann abelsch, wenn $G' \subset N$.

Aufgabe 2:
Sei B (bzw. U) die folgende Teilmenge von $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$

$$\begin{aligned} B \;&=\; \{(a_{ij}) \in G \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \\ (\text{bzw. } U \;&=\; \{(a_{ij}) \in B \mid a_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n\}\,). \end{aligned}$$

a) Zeige, dass B (bzw. U) zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Untergruppe von G ist. Zeige ferner, dass U ein Normalteiler in B ist.

b) Beweise, dass $B/U \simeq (\mathbb{R}^\times)^n$.

c) Entscheide, ob B (bzw. U) ein Normalteiler in G ist.

d) Zeige, dass G kein Normalteiler in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe. Die folgende Teilmenge

$$Z(G) \;=\; \{g \in G \mid gh = hg \;\forall h \in G\}$$

heißt das *Zentrum von G*.

a) Zeige, dass $Z(G)$ abelsch und ein Normalteiler in G ist.

b) Berechne die Zentren von U, B und G aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4:
Sei G eine Gruppe.

a) Zeige, dass jede Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler in G ist.

b) Zeige, dass nicht jede Untergruppe vom Index 3 ein Normalteiler in G ist.

c) Seien M, N Normalteiler in G mit $M \cap N = \{e\}$. Zeige, dass für alle $m \in M$, $n \in N$ die Gleichung $mn = nm$ gilt.

d) Seien $a, b \in G$, und sei H eine Untergruppe von G, die die Implikation

$$Ha \neq Hb \implies aH \neq bH$$

erfüllt. Ist H ein Normalteiler in G?

Abgabe: Donnerstag, 25. Oktober 2012.