Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Zeige, dass die Produktgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann zyklisch ist, wenn m und n teilerfremd sind. Beweise damit folgenden Satz. Sind m und n teilerfremde ganze Zahlen und $u, v \in \mathbb{Z}$ beliebig, so gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv u \pmod m$ und $x \equiv v \pmod n$.

b) Sei G eine Gruppe. Seien $N_1, \ldots, N_k$ Normalteiler in G mit

$$N_1 \cap \ldots \cap N_k \;=\; \{e\}.$$

Setze $H_i = G/N_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Zeige, dass G zu einer Untergruppe von $H_1 \times \ldots \times H_k$ isomorph ist.

Aufgabe 2:

Für $n \geq 1$ bezeichne $\varphi(n)$ die Anzahl der Erzeugenden der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *Eulersche φ-Funktion*. Zeige:

a) Ist p eine Primzahl und $k > 0$, so gilt $\varphi(p^k) = p^k(1 - \frac{1}{p})$.

b) Sind m und n teilerfremd, so gilt $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

c) Für $n > 2$ ist $\varphi(n)$ gerade.

d) Es gilt $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Aufgabe 3:

Sei $n \geq 3$. Betrachte das regelmäßige n-Eck in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ gebildet von den Punkten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x_i \;=\; \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \; 1 \leq i \leq n.$$

Sei D_{2n} die Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$D_{2n} \;=\; \{g \in O(2, \mathbb{R}) \mid \forall\, 1 \leq i \leq n \;\exists\, 1 \leq j \leq n : \; gx_i = x_j\},$$

d.h. D_{2n} ist die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks. Die Gruppe D_{2n} wird *Diedergruppe der Ordnung* $2n$ genannt.

Zeige:

a) Die Gruppe D_{2n} wird erzeugt von

$$\sigma \;=\; \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Die von σ erzeugte Untergruppe in D_{2n} ist ein Normalteiler der Ordnung n, und die Ordnung von D_{2n} ist $2n$.

c) Sei G eine Gruppe erzeugt von zwei Elementen $a, b \in G$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(a) &= n, \\ \operatorname{ord}(b) &= 2, \\ abab &= e. \end{aligned}$$

Dann ist G isomorph zu D_{2n}.

Aufgabe 4:

Sei S_4 die symmetrische Gruppe auf 4 Elementen. Bestimme alle Untergruppen der Ordnung 4 in S_4. Welche davon sind normal in S_4? Zeige, dass die Gruppe S_4 *auflösbar* ist.
Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, falls eine Kette von Untergruppen $\{e\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{k-1} \subset N_k = G$ mit folgenden beiden Eigenschaften existiert.

i) Die Gruppe N_{i-1} ist normal in N_i für alle $1 \leq i \leq k$.

ii) Die Faktorgruppe N_i/N_{i-1} ist abelsch für alle $1 \leq i \leq k$.

Abgabe: Montag, 5. November 2012.