Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2012/13

Einführung in die Algebra

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und p eine Primzahl.

a) Zeige, dass alle p-Sylow-Untergruppen in G zueinander konjugiert sind.

b) Sei m_p die Anzahl der p-Sylow-Untergruppen in G. Zeige, dass $m_p | n$ und $m_p \equiv 1 \pmod p$.

Aufgabe 2:

Sei p eine Primzahl.

a) Bestimme alle p-Sylow-Untergruppen von S_p. Wie viele gibt es?

b) Bestimme eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Wie viele gibt es, falls $n = 2$? Und für beliebiges n?

Hinweis: Für die letzte Frage benutze die Operation der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ auf der Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_p^2$.

Aufgabe 3:

In welchem der folgenden Fälle handelt es sich um Ringe, in welchem um Körper?

a) Sei $R \subset \mathbb{Q}$ die Menge der Brüche $\frac{a}{b}$, wobei b nicht durch 11 teilbar ist, zusammen mit den von $\mathbb{Q}$ induzierten Operationen.

b) Sei R die Menge der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit den gewöhnlichen Matrizenoperationen.

Aufgabe 4:

Sei $d \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Setze $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ aufgefasst als Teilmenge in $\mathbb{C}$.

a) Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$ ist, der $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{d}$ enthält.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{d} &\longmapsto a^2 - b^2 d \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und multiplikativ, d.h. $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

c) Zeige

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(x) \in \mathbb{Z}^\times\},$$

und bestimme für $d < 0$ die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ explizit. Finde für $d = 2$ Elemente unendlicher Ordnung in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

Abgabe: Donnerstag, 15. November 2012.