Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

7. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei R ein Hauptidealring, und seien $a, b, r \in R\backslash\{0\}$. Zeige

$$r \cdot \mathrm{ggT}(a,b) \;=\; \mathrm{ggT}(r\cdot a, r\cdot b).$$

b) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Beweise, dass ihr ggT in $\mathbb{Q}[X]$ derselbe ist wie ihr ggT in $\mathbb{C}[X]$.

c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Zeige, dass es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^m + b^n \equiv 1 \pmod{a \cdot b}$.

d) Berechne den ggT der Polynome $2X^3 + 9X^2 + 10X + 3$ und $X^2 - X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ und in $\mathbb{F}_5[X]$.

Aufgabe 2:

Für $d \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ sei $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ der Ring aus Aufgabe 4 von Blatt 5.

a) Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ mit $d = -1$ heißt der Ring der *ganzen Gaußschen Zahlen*. Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Größenfunktion N aus Aufgabe 4 von Blatt 5 euklidisch ist.

   Hinweis zum Divisionsalgorithmus: Für $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ mit $v \neq 0$ suche man ein Element aus $\mathbb{Z}[i]$, das zum Quotienten $\frac{u}{v} \in \mathbb{C}$ minimalen Abstand hat.

b) Berechne $\mathrm{ggT}(3 + i, 2 + 2i)$ in $\mathbb{Z}[i]$.

c) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gilt

$$6 \;=\; 2 \cdot 3 \;=\; (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

   Zeige, dass 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$, $1 - \sqrt{-5}$ paarweise nicht assoziierte Elemente sind, die zwar irreduzibel, aber nicht prim sind. Gib ein Ideal an, das kein Hauptideal ist.

Aufgabe 3:

Sei $R = \mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + X + 1)$. Zeige, dass R ein Körper mit 4 Elementen ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + X + 1)$ isomorph zu $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ ist.

Aufgabe 4:
Sei R ein Integritätsbereich und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge mit $1 \in S$.

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Zeige, dass das vom Bild von $\mathfrak{p}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}_{S^{-1}R}$ ein Primideal ist und

$$\mathfrak{p}_{S^{-1}R} = \{\frac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S\}.$$

b) Zeige, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von dieser Form ist.

c) Zeige, dass es eine Bijektion von der Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ auf die Menge der Primideale von $S^{-1}R$ gibt.

d) Zeige, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist, falls R ein Hauptidealring ist.

Abgabe: Donnerstag, 29. November 2012.