Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2012/13**
T. Richarz

Einführung in die Algebra

8. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper Q. Sei $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom, und sei $r \in Q$ eine Nullstelle von f. Zeige, dass $r \in R$.

b) Sei K ein Körper, der unendlich viele Elemente besitzt. Sei $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Beweise, dass $f = 0$. Gib im Falle eines endlichen Körpers ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2:

a) Beweise, dass folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind.

i) $X^5 - 5X^4 - 6X - 1$,

ii) $3X^4 - 18X^3 + 135X^2 + 63$,

iii) $X^4 + a^2$, wobei a eine ungerade Zahl ist.

b) Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_0 \neq 0$, und gelte

$$f = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$$

in $\mathbb{C}[X]$. Zeige, dass f irreduzibel ist, falls $|\alpha_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper, und seien A, B, C, U, V, X, Y, Z Unbestimmte. Sei $f : K[A, B, C] \to K[U, V]$ der eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus mit $f(A) = U^2$, $f(B) = UV$, $f(C) = V^2$. Sei R das Bild von f. Sei S der Restklassenring $K[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$.

a) Konstruiere mittels der universellen Eigenschaft des Polynomrings einen Isomorphismus $S \to R$.

b) Zeige, dass R nicht faktoriell ist.

Aufgabe 4:

Sei R ein kommutativer Ring.

a) Bestimme den Polynomring $R[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ assoziiert zur kommutativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ als Faktorring von $R[X]$.

b) Bestimme den Polynomring $R[\mathbb{Z}]$ assoziiert zur kommutativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}, +)$ als Lokalisierung von $R[X]$.

Abgabe: Donnerstag, 06. Dezember 2012.