Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2012/13

Einführung in die Algebra

9. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei A ein kommutativer Ring, und sei M ein A-Modul mit $M \simeq M \oplus M$. Betrachte den Ring $R = \mathrm{End}_A(M)$.

a) Zeige, dass R nicht kommutativ ist und $R \simeq R^2$ als R-Modul.

b) Sei $n \geq 1$ beliebig. Zeige, dass der R-Modul R eine Basis mit genau n Elementen hat.

c) Sei $A = \mathbb{R}$, und sei M der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Folgen $(a_0, a_1, \ldots)$ reeller Zahlen mit $a_i = 0$ für fast alle i. Zeige, dass M die obige Bedingung erfüllt.

Aufgabe 2:

Sei R ein Integritätsbereich, und sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $R\backslash\{0\}$ mit $1 \in S$. Sei M ein R-Modul. Auf $M \times S$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $(m, s) \sim (m', s')$, falls ein $s'' \in S$ existiert mit $s''s'm = s''s\,m'$. Sei $S^{-1}M$ die Menge der Äquivalenzklassen. Man schreibt die Klasse von (m, s) auch als m/s. (Ist M ein Primideal von R, so stimmt diese Definition mit der in Aufgabe 4 von Blatt 7 überein.)
Für $m, m' \in M$, $s, s' \in S$ und $r \in R$ sei $(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/ss'$ und $(r/s) \cdot (m/s') = (rm/ss')$. Dadurch wird $S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Modul. Für einen Homomorphismus $f : M \to M'$ von R-Moduln bezeichnen wir mit $f_S : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ den Homomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln mit $f_S(m/s) = f(m)/s$.

a) Sei
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass
$$0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{f_S} S^{-1}M \xrightarrow{g_S} S^{-1}M'' \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz von $S^{-1}R$-Moduln ist.

b) Zeige, dass ein Ideal in einem Integritätsbereich, das kein Hauptideal ist, nicht frei ist. (Somit erhalten wir mit Aufgabe 2 von Blatt 7 einen freien Modul, der einen Untermodul besitzt, der nicht frei ist.)
Hinweis: Aufgabenteil b) kann aus a) gefolgert werden, indem man $S = R\backslash\{0\}$ wählt. Es geht auch direkter.

Aufgabe 3:

Sei δ der Verbindungshomomorphismus aus dem Schlangenlemma. Zeige, dass die Sequenz von Moduln am Quellort *oder* Zielort von δ exakt ist.

Aufgabe 4:

Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind noethersch?

a) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}[X]$

d) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

Aufgabe 5:

Matheball am Samstag, 8. Dezember! Ab 20 Uhr startet der Winterball im Tanzverein Rondo in Beuel, Auguststraße 4. Vorher findet noch ein Tanzkurs für alle ab 19 Uhr statt. Der Eintritt an der Abendkasse beträgt 3€.

Abgabe: Donnerstag, 13. Dezember 2012.