Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **SS 2013**

Algebra I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei R ein Ring, und sei M ein noetherscher R-Modul. Zeige, dass die Lokalisierung $S^{-1}M$ bezüglich einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subset R$ ein noetherscher $S^{-1}R$-Modul ist.

Aufgabe 2:
Sei R ein Ring. Für einen R-Modul M bezeichne

$$\mathrm{supp}(M) \;=\; \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

den *Träger von M*. Zeige folgende Aussagen.

i) $M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{supp}(M) \neq \varnothing$

ii) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt $\mathrm{supp}(R/I) = V(I)$.

iii) Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so gilt

$$\mathrm{supp}(M) \;=\; \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'').$$

iv) Ist $M = \sum_{j\in J} M_j$ Summe von Untermoduln, so gilt

$$\mathrm{supp}(M) \;=\; \bigcup_{j\in J} \mathrm{supp}(M_j).$$

Aufgabe 3:
Sei p eine Primzahl, und sei $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimme die Fundamentalmatrix der Bilinearform $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}$ bezüglich einer geeigneten Basis.

Abgabe: Donnerstag, 16. Mai 2013.