

Einführung in die Algebra

12. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern E und F . Zeige, dass

- $[EF : F] \leq [E : E \cap F]$,
- $[EF : K] \leq [E : K][F : K]$,
- $[EF : K] = [E : K][F : K]$, falls $[E : K]$ und $[F : K]$ teilerfremd sind.

Aufgabe 2:

- Berechne das Minimalpolynom von $e^{2\pi i/3}$ über \mathbb{Q} .
- Berechne das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} . Gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?
- Zeige, dass es Körper der Ordnung 8 und 25 gibt.

Aufgabe 3:

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Sei $a \in L$, und sei $\phi_a : L \rightarrow L$ die K -lineare Abbildung mit $\phi_a(x) = ax$.

- Das Minimalpolynom von a über K ist gleich dem Minimalpolynom von ϕ_a .
- Falls $L = K(a)$, dann ist das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom.
- Das charakteristische Polynom von ϕ_a ist eine Potenz des Minimalpolynoms.

Aufgabe 4:

Sei L/K eine Körpererweiterung.

- Sei $a \in L \setminus \{0\}$. Dann ist a genau dann algebraisch über K , wenn $a^{-1} \in K[a]$.
- Die Erweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring R von L mit $K \subset R$ ein Körper ist.

Abgabe: Donnerstag, 17. Januar 2013.